ДОСЛІДЖЕННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА

Овсієнко Віта Вікторівна, наук. кер. – Кулигіна Л.І.

Гірничий технікум Криворізького технічного університету

Будучи основною в курсі елементарної математики, квадратична функція природно формує широкий клас задач різноманітних за формою і за змістом, але об'єднаних загальною ідеєю – в основі їх розв'язання лежать властивості заданої функції. До квадратних рівнянь (нерівностей) зводиться чимало рівнянь вищих степенів, тригонометричних, логарифмічних, показникових рівнянь (нерівностей). Відшукання розв'язків значної кількості задач з параметрами також базується на застосуванні властивостей квадратного тричлена. Тема "Дослідження квадратного тричлена" є актуальною.

Дискримінант D, старший коефіцієнт a, абсциса x_0 вершини параболи конструюють "каркас", на якому будується теорія квадратичної функції.

Виконуючи роботу, автор ставив завдання:

- ознайомитися з науковою літературою з означеної проблеми;
- дослідити, за яких умов квадратний тричлен має корені;
- коли функція зростає (спадає);
- в ході досліджень знайти проміжки знакосталості і скласти таблицю для розв'язування нерівностей;
- дослідити, як змінюється положення вершини параболи в залежності від знаків коефіцієнтів a, в, с;
- продемонструвати властивості функції на прикладах задач.

Квадратний тричлен і його корені

О з н а ч е н н я. **Функція ax^2+bx+c, в якому x – незалежна змінна, а a,b,c – дійсні числа причому $a \neq 0$, називається тричленом другого степеня або квадратним тричленом.**

Числа *a, b, c* - коефіцієнти квадратного тричлена. Відмінність між тричленом і лівою частиною рівняння $ax^2+bx+c=0$ полягає в тому, що в рівнянні змінна x набуває тільки тих значень, які задовольняють рівняння, тоді як у тричлені x може бути будь-яким дійсним числом.

Квадратний тричлен називають також *квадратичною функцією* і записують у вигляді:

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Значення x, при яких квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ перетворюється в нуль, називають *коренями тричлена.* Отже, для знаходження коренів квадратного тричлена потрібно розв'язати квадратне рівняння:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Іде дослідження, на основі якого робляться висновки:

1) У випадку, коли дискримінант $D=b^2-4ac>0$, маємо два різних кореня:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a};x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Якщо $D=b^2-4ac=0$, маємо два рівних корені: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

3) Якщо $D=b^2-4ac<0$, то $\frac{D}{4a^2}<0$, то відповідний квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ не має дійсних коренів.

Сформулюємо теорему.

Т е о р е м а. ***Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з дійсними коефіцієнтами a,b,c де $a \neq 0$, має два різні корені, якщо $D>0$ і два однакові корені, якщо $D=0$, квадратний тричлен не має дійсних коренів, при $D<0$.***

Алгебраїчне дослідження властивостей функції

$$y = ax^2 + bx + c$$

Розглянемо три випадки: $D>0$, $D<0$, D=0.

Т е о р е м а. ***Якщо D>0, то а) знак квадратичної функції збігається із знаком числа а для всіх $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; знак функції протилежний знаку числа а для всіх $x \in (x_1; x_2)$; якщо $x = x_1$ і $x = x_2$, квадратична функція дорівнює нулю; б) вершина параболи знаходиться в точці з координатами $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$; в) якщо $a > 0$, функція спадає на проміжку $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ і зростає на проміжку $x \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$; якщо $a < 0$, функція зростає на проміжку $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ і спадає на проміжку $x \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.***

Т е о р е м а. ***Якщо D=0, то при всіх дійсних значеннях х, крім $x = -\frac{b}{2a}$, знак функції $y = ax^2 + bx + c$ збігається із знаком числа а; при $x = -\frac{b}{2a}$ значення функції дорівнює нулю.***

Т е о р е м а. ***Якщо D<0, то при всіх дійсних значеннях х знак функції $y = ax^2 + bx + c$ збігається із знаком числа а.***

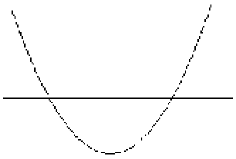
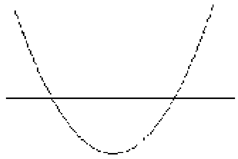
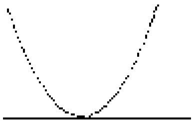
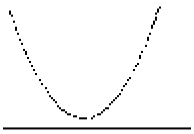
Розв'язування квадратних нерівностей типу $ax^2+bx+c>0$ (>0, <0 *або* <0) тісно пов'язане з розташуванням параболи $y=ax^2+bx+c$ (a=0) відносно осі Ox. Запишемо рівняння параболи у вигляді: $y = \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right), D = b^2 - 4ac$

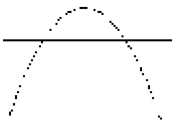
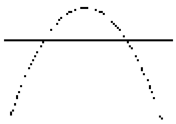
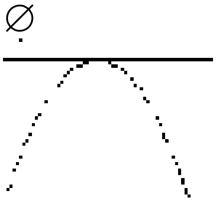
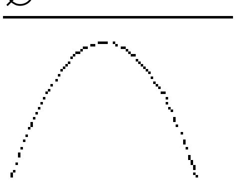
З цієї формули слідує, що розташування параболи $y=ax^2+bx+c$ відносно осі Ox цілком визначається знаком дискримінанта D та коефіцієнта a.

1. D<0. При $a>0$ парабола цілком знаходиться вище осі Ox.
   При $a<0$ парабола цілком знаходиться нище осі Ox.
2. D=0. При $a>0$ парабола знаходиться вище осі Ox, дотикається в одній точці: $x = -\frac{b}{2a}$
   При $a<0$ парабола знаходиться нижче осі Ox, дотикаясь її в одній точці: $x = -\frac{b}{2a}$
3. D>0. При $a>0$ вітки вгору, парабола перетинає вісь Ox в двох точках x_1 та x_2.
   При $a<0$ вітки вниз, парабола перетинає вісь Ox в двох точках x_1 та x_2.

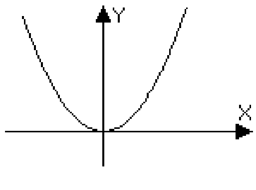
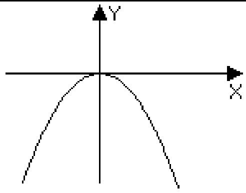
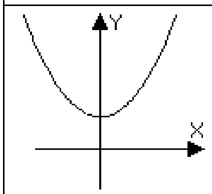
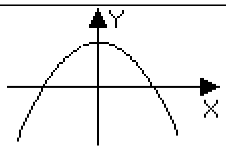
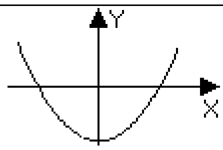
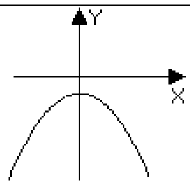
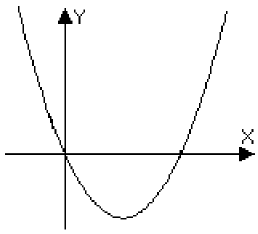
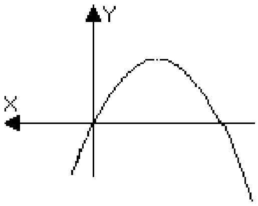
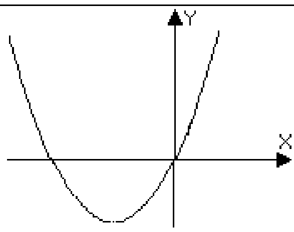
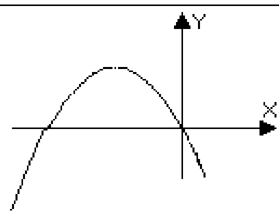
Проміжки знакосталості функції

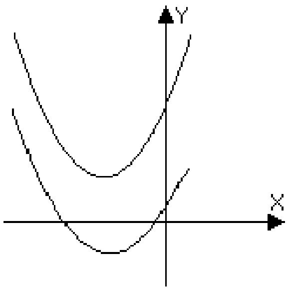
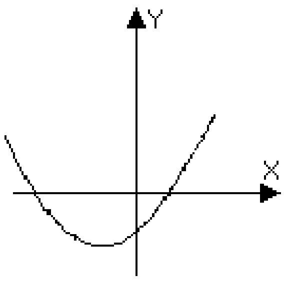
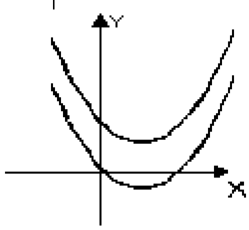
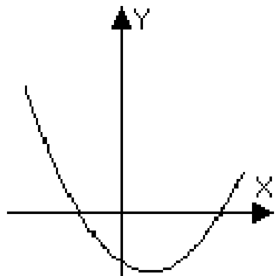
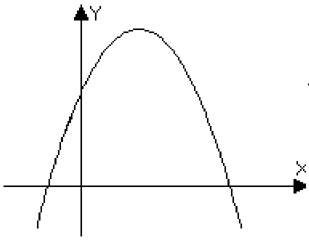
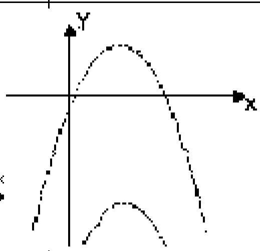
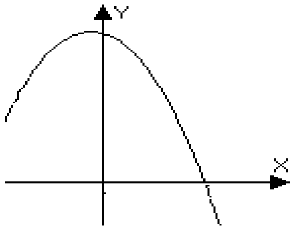
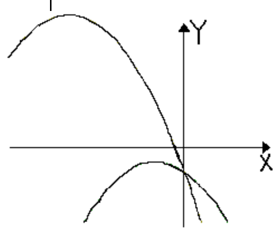
$$y = ax^2 + bx + c$$

a>0	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
D>0	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ 	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in (x_1; x_2)$ 	$x \in [x_1; x_2]$
D=0	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$ 	$x \in (-\infty; +\infty)$	$\varnothing$	$x = x_0$
D<0	$x \in (-\infty; +\infty)$ 	$x \in (-\infty; +\infty)$	$\varnothing$	$\varnothing$

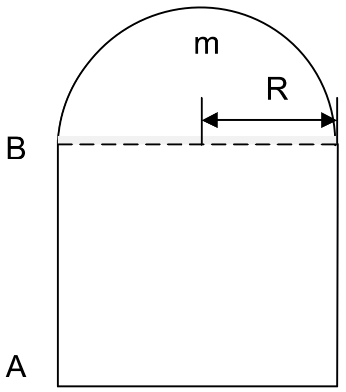
a<0	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
D>0	$x \in (x_1; x_2)$ 	$x \in [x_1; x_2]$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ 	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
D=0	$\varnothing$ 	$x = x_0$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
D<0	$\varnothing$ 	$\varnothing$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$

Дослідимо, як змінюється положення вершини параболи в залежності від знаків коефіцієнтів a,b,c.

$b=0, c=0, a>0$	$b=0, c=0, a<0$			
		Вершина параболи співпадає з початком координат		
$b=0, c>0, a>0$	$b=0, c>0, a<0$	$b=0, c<0, a>0$	b=0, c<0, a<0	
				Вершина параболи знаходиться на осі *Oy*
$c=0, b<0, a>0$	$c=0, b>0, a<0$	$c=0, b>0, a>0$	$c=0, b<0,a<0$	
				Парабола проходить через початок координат

$a>0, b>0, c>0$	$a>0, b>0, c<0$	$a>0, b<0, c>0$	$a>0, b<0, c<o$
			
Вершина знаходиться в II або в III чверті, перетинає вісь Oy в верхній півплощині	D>0, вершина в III чверті, є корені	Вершина в I або в IV чверті, перетинає вісь Oy в точці з додатньою ординатою	D>0, є корені, вершина знаходиться в IV чверті
$a<0, b>0, c>0$	$a<0, b>0, c<0$	$a<0, b<0, c>0$	$a<0, b<0, c<0$
			
D>0, вершина в I чверті	Вершина в I або в IV чверті, перетинає вісь Oy в точці з від'ємною ординатою	D>0, є корені, вершина в II чверті	Вершина в II або в III чверті, парабола перетинає вісь Oy в точці з від'ємною ординатою

Задача: При проведенні гірничих виробок велике значення має максимальна пропускна можливість виробки в залежності від її периметру. Переріз виробки має форму прямокутника, який закінчується півкругом. Який слід взяти радіус півкруга, щоб площа перерізу була найбільшою, якщо периметр перерізу дорівнює Р?



Розв'язання:

Складемо функцію залежності перерізу виробки від довжини радіуса півкруга. Нехай радіус півкруга дорівнює R, тоді довжина дуги півкола $BmC = \pi R$

і $P = 2|AB| + |AD| + BmC = 2|AB| + 2R + \pi R$, звідки

$$|AB| = \frac{P - 2R - \pi R}{2}.$$

Знайдемо площу перерізу $S(R) = S_{ABCD} + S_{ПІВКР} = |AB| \cdot |BC| + S_{ПІВКР} =$

$$= 2R \cdot \frac{P - 2R - \pi R}{2} + \frac{\pi R^2}{2} = PR - 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot R^2 + PR.$$

Функція S(R) є квадратичною з коефіцієнтами $a = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$, $в = P$, $c = 0$. Так як $a < 0$, то тричлен при $R = -\frac{в}{2}$ приймає найбільше значення. Звідси випливає, що площа перерізу виробки буде найбільшою при радіусі півкруга $\frac{P}{4+\pi}$, або ширина виробки дорівнює $\frac{2P}{4+\pi}$.

Задача: При яких значеннях *a* квадратний тричлен $ax^2-7x+4a < 0$ приймає від'ємні значення для будь-яких значеннях х?

Квадратний тричлен $ax^2-7x+4a < 0$ для $x \in R$, коли $\begin{cases} a < 0 \\ 49 - 16a^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a^2 > \frac{49}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \left[\begin{array}{l} a > \frac{7}{4} \\ a < -\frac{7}{4} \end{array}\right. \end{cases}$, тобто

$a < -\frac{7}{4}$. Відповідь: $a \in \left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$.

ВИСНОВОК.

Досліджуючи властивості квадратного тричлена, з'ясовано, що в курсі елементарної математики квадратична функція відіграє важливу роль і формує широкий клас задач різноманітних за формою і за змістом, але об'єднаних загальною ідеєю – в основі їх розв'язання лежать властивості заданої функції. Відшукання розв'язків значної кількості задач з параметрами також базується на застосуванні властивостей квадратного тричлена. До квадратних рівнянь (нерівностей) зводиться чимало рівнянь вищих степенів, тригонометричних, логарифмічних, показникових рівнянь (нерівностей).

При дослідженні властивостей з'ясовано, які характеристики її графіка відіграють важливу роль. До них відносяться вершина параболи і точки, в яких парабола перетинає вісь або дотикається до неї.

В ході опрацювання наукової літератури та виконання роботи досліджено, за яких умов квадратний тричлен має корені, продемонстровано властивості функції на прикладах задач. Знайдено проміжки, в яких квадратична функція зберігає знак, складено таблицю для розв'язування нерівностей, з'ясовано проміжки зростання чи спадання квадратичної функції та її найбільше або найменше значення.

Самостійно досліджено, як змінюється положення вершини параболи в залежності від знаків коефіцієнтів а, в, с.